Tony Crane　数学分析(甲)I(H)

有界集：$\exists X>0$，$\forall x\in S$，有 $|x|\le X$

上确界：$\beta=\sup S$

1. β是S上界：$\forall x\in S$，有 $x\le\beta$

2. 任何小于β数不是S上界：$\forall\varepsilon>0$，$\exists x\in S$，使$x>\beta-\varepsilon$

下确界：$\alpha=\inf S$，$\forall x\in S$，$x\ge\alpha$，$\forall\varepsilon>0$ $\exists x\in S$ 使 $x<\alpha+\varepsilon$

确界存在定理：非空有上界数集必有上确界

" " 下 下 "

数列极限：

1. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，有 $|x_n-a|<\varepsilon$

2. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，有 $x_n\in U(a,\varepsilon)$

3. $\forall\varepsilon>0$，$U(a,\varepsilon)$外只有有限项x_n。

4. $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\ge N$ 有 $|x_n-a|\le M\varepsilon$ （M与n无关）

数列极限性质

1. 惟一性：收敛数列极限必惟一

2. 有界性：收敛数列必有界

3. 保序性：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，$a<b\Rightarrow\exists N$，$\forall n>N$，$x_n<y_n$

推：$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b>0\Rightarrow\exists N$，$\forall n>N$，$y_n>\frac{b}{2}>0$ （保号性）

4. 夹逼性：$x_n\le y_n\le z_n$ $(n>N_0)$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

单调增加数列：$x_n\le x_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 严格~：$x_n<x_{n+1}$

Stolz定理：设$\{y_n\}$为严格单调增加正无穷大量，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=a$

单调有界定理：单调有界数列必定收敛

重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$

闭区间套：$\{[a_n, b_n]\}$ 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

闭区间套定理：如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在惟一实数 ξ 属于所有闭区间，且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

子列：$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 则 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ 称为 $\{x_n\}$ 一子列

致密性定理(Bolzano-Weierstrass)：有界数列必有收敛子列

基本数列：$\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n,m > N$，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$

Cauchy 收敛原理：$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 是基本数列

覆盖：$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}$ 中一族子集组成的集合.

若 $A \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$，则称 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 A 的一个覆盖

开覆盖：E_λ 都是开区间　有限覆盖：Λ 中元素有限多

有限覆盖定理(Heine-Borel)：$[a,b]$ 为闭区间，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一开覆盖，则必存在一个 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 子集构成 $[a,b]$ 有限覆盖.

聚点：$E \subset \mathbb{R}$，$x_0 \in \mathbb{R}$，$\forall \delta > 0$　$U^\circ(x_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$

聚点原理：$\mathbb{R}$ 中有界无穷子集至少有一个聚点

函数极限：$f(x)$ 在 x_0 某去心邻域中有定义，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$

$\forall x$ 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

函数极限性质：

1. 惟一性
2. 局部保序性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$　$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ 且 $A > B$

   则 $\exists \delta > 0$　$\forall x\ (0 < |x - x_0| < \delta)$ 有 $f(x) > g(x)$
3. 局部有界性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$　$\exists \delta > 0$ 使 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0, \delta)$ 有界

4. 夹逼性

Heine定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且$x_n \neq x_0$

相应函数值数列$\{f(x_n)\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

单侧极限：$f(x)$在$(x_0-\rho, x_0)$有定义$(\rho>0)$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$

$\forall x\ (-\delta<x-x_0<0)$ 有$|f(x)-B|<\varepsilon$ 则B为$f(x)$在x_0左极限

Cauchy收敛原理：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在有限$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists X>0$

$\forall x', x''>X$，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

单调收敛定理：设$f(x)$在$U^+(x_0,\delta)$内有定义，

若$f(x)$在$U^+(x_0,\delta)$上单调上升 则$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\inf\{f(x)\mid x\in U^+(x_0,\delta)\}$

〃　　〃　　下降则$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\sup\{f(x)\mid$ 〃 $\}$

连续函数：设$f(x)$在x_0某个邻域中有定义 且有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

则称$f(x)$在点x_0连续，x_0为$f(x)$的连续点

若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 则$f(x)$在x_0左连续、$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$右连续

若$f(x)$在(a,b)的每一点都连续，称$f(x)$在开区间(a,b)连续

若$f(x)$在(a,b)连续 在左端点a右连续、右端点b左连续 则称

$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续

不连续点类型：

第一类：$f(x)$在x_0左右极限都存在但不相等

第二类：$f(x)$在x_0左右极限至少有一个不存在

第三类：$f(x)$在x_0左右极限存在、相等，但不等于$f(x_0)$或无定义

反函数存在性定理：若$y=f(x)$严格单调增(减) 则存在它的反

函数$x=f^{-1}(y)$ 并且$f^{-1}(y)$也是严格增(减)的

反函数连续性定理：$f(x)$在$[a,b]$连续、严格增 则$f^{-1}(y)$在$[f(a),f(b)]$连续

复合函数连续性：若 $u=g(x)$ 在 x_0 连续 $g(x_0)=u_0$，又 $y=f(u)$ 在 u_0 连续，则 $y=f\circ g(x)$ 在 x_0 连续

无穷小量比较：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)/v(x)=0$ 则 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是高阶无穷小，记 $u(x)=o(v(x))$ $(x\to x_0)$

2. $\exists A$，$\forall x\in U^0(x_0,\delta)$ $|u(x)/v(x)|\le A$ 称 $x\to x_0$ 时 $u(x)/v(x)$ 为有界量，记为 $u(x)=O(v(x))$ 若 $\exists a$，$a\le|u(x)/v(x)|$ 则 $u(x)$ 与 $v(x)$ 同阶无穷小

3. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)/v(x)=1$ 则 $x\to x_0$ $u(x)$ 与 $v(x)$ 等价无穷小，记 $u(x)\sim v(x)$ $(x\to x_0)$

$\sin x\sim x\ (x\to 0)$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$ $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

$u(x)\sim v(x)\ (x\to x_0)\iff u(x)=v(x)+o(v(x))\ (x\to x_0)$

无穷大量比较同上，但不用小o

等价量：$\sin x\sim x\ (x\to 0)$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$

$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\ (x\to 0)$ $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$

$e^x-1\sim x\ (x\to 0)$ $(1+x)^a-1\sim ax\ (x\to 0)$

有界性定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界

最值定理：$f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists\xi,\eta\in[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$ $f(\xi)\le f(x)\le f(\eta)$

零点存在定理：$f(x)\in C[a,b]$，$f(a)\cdot f(b)<0$ 则 $\exists\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=0$

中间值定理：$f(x)\in C[a,b]$ 则它定能取到最大值和最小值间任何值。

一致连续：$f(x)$ 定义在 X 上，若 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in X$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 X 上一致连续

$f(x)$ 在 X 上一致连续 $\iff\forall\{x_n'\}$ $(x_n'\in X)$ 和 $\{x_n''\}$ 只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

Cantor定理：$f(x)\in C[a,b]$ 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

$f(x)\in C(a,b)$ 则 $f(x)$ 在 (a,b) 一致连续 $\iff f(a+)$ $f(b-)$ 存在

反函数求导定理：$f(x)$在(a,b)连续，严格单调，可导，$f'(x)\neq 0$

记 $\alpha=\min(f(a+),f(b-))$，$\beta=\max(f(a+),f(b-))$，则 $x=f^{-1}(y)$

在(α,β)上可导，且 $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$

eg. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数公式：$(\sec x=1/\cos x \quad \csc x=1/\sin x)$

$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\tan x\sec x \quad (\csc x)'=-\cot x\csc x$

$(\arcsin x)'=1/\sqrt{1-x^2} \quad (\arccos x)'=-1/\sqrt{1-x^2}$

$(\arctan x)'=1/(1+x^2) \quad (\operatorname{arccot} x)'=-1/(1+x^2)$

$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch}x \qquad (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x \qquad (\operatorname{th}x)'=\operatorname{sech}^2 x$

$(\operatorname{cth}x)'=-\operatorname{csch}^2 x \quad (\operatorname{sh}^{-1}x)'=1/\sqrt{1+x^2} \quad (\operatorname{ch}^{-1}x)'=1/\sqrt{x^2-1}$

$(\operatorname{th}^{-1}x)'=(\operatorname{cth}^{-1}x)'=1/(1-x^2)$

参数方程求导：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$ $\varphi(t)$ $\psi(t)$可微，$\varphi(t)$严格单调 $\varphi'(t)\neq 0$

则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Leibniz公式：$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)\,g^{(k)}(x)$

极值：$f(x)$在(a,b)上有定义，$x_0\in(a,b)$ 若$\exists U(x_0,\delta)\subset(a,b)$

使 $f(x)\le f(x_0)$ $(x\in U(x_0,\delta))$ 则称x_0是$f(x)$极大值点.

Fermat引理：x_0是$f(x)$极值点，且$f(x)$在x_0导数存在，则$f'(x_0)=0$

Rolle定理：设$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且$f(a)=f(b)$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

Lagrange中值定理：设$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 则至少存在一点

$\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

设 $f(x)$ 在 I 可导. 则 $f(x)$ 在 I 单增 $\Leftrightarrow \forall x \in I.\ f'(x) \geq 0$

设 $f(x)$ 在 I 二阶可导. 则 $f(x)$ 在 I 下凸 $\Leftrightarrow \forall x \in I\ f''(x) \geq 0$

Jensen不等式: 若 $f(x)$ 为 I 上下凸函数 则 $\forall x_i \in I$. λ_i 满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

有: $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Cauchy中值定理: 设 $f(x), g(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ 且 $\forall x \in (a,b)\ g'(x) \neq 0$

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

导数极限定理: 设 $f(x) \in C(U(x_0,\delta)) \cap D(U^\circ(x_0,\delta))$

若有 $\lim_{x\to x_0} f'(x) = A$ 则 $f(x)$ 在 x_0 处可微. 且 $f'(x_0) = A$

导数介值定理(Darboux): 设 $f(x) \in D[a,b]$ 则 $f'(x)$ 可以取到 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 间任意值.

L'Hospital 法则: 设 $f(x).\ g(x) \in D(a, a+d]$ 且 $g'(x) \neq 0$ 若此时有

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$ 且 $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(有限或 ∞)

则成立: $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Peano余项Taylor公式: 设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数 则 $\exists\ x_0$ 一个邻域有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Lagrange余项Taylor公式: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有 n 阶连续导数. 且在 (a,b) 有 $n+1$ 阶导数. 设 $x_0 \in [a,b]$ 为一定点. 则 $\forall x \in [a,b]$ 有 (ξ 在 x, x_0 间)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Lagrange插值多项式：$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\right]$

Maclaurin公式：$f(x)$在$x=0$处Taylor公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+C_\alpha^n x^n+o(x^n)$$

曲线渐近线方程：$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$　$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$　(或$+\infty$改$-\infty$)

则 $y=ax+b$ 为一条渐近线

若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$ 则 $x=a$ 为一条渐近线

第一类换元积分法(凑微分法)：

$$\int f(x)\,dx=\int\tilde{f}(g(x))\,dg(x)=\tilde{F}(g(x))+C$$

第二类换元积分法：$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

$$=\tilde{F}(t)+C=\tilde{F}(\varphi^{-1}(x))+C$$

$\sqrt{a^2-x^2}\to x=a\sin t$　$\sqrt{x^2-a^2}\to x=a\sec t$　$\sqrt{x^2+a^2}\to x=a\tan t$

分部积分法：$\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx$

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|\right) + C$

有理函数不定积分

$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C \qquad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C$

$\int \frac{\mu x + \nu}{x^2+2\xi x+\eta^2} = \frac{\mu}{2}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2| + \frac{(\nu-\mu\xi)}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\frac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}} + C$

三角化有理：$\tan\frac{x}{2} = t$

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$

若在原有划分中加入分点、形成新划分，则上和不增，下和不减

Darboux定理：$\forall f(x)$在$[a,b]$有界，恒有 $\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = L \quad \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P) = l$

其中 $L = \inf\{\overline{S}(P) \mid \overline{S}(P) \in \overline{S}\} \quad l = \sup\{\cdots\} \quad \lambda = \max\Delta x_i$

Riemann可积充要条件

1. $\forall$划分P $\lambda = \max\Delta x_i \to 0$时 $\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P) = L = l = \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)$

2、$\forall$划分P $\lambda\to 0$时 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$

推：闭区间上连续函数必定可积、

推：闭区间上单调函数必定可积、

3. $\forall\varepsilon>0$ $\exists$划分P 使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

推：闭区间上只有有限个不连续点的有界函数可积

定积分基本性质：

1. 线性性质，推：
若$f(x)$在$[a,b]$可积、而$g(x)$在$[a,b]$上只有有限个点与$f(x)$不同则$g(x)$在$[a,b]$也可积．且$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

2. 乘积可积性：$f(x)$. $g(x)$在$[a,b]$可积、则$f(x)\cdot g(x)$也可积

3. 保序性：$\forall x\in[a,b]$ $f(x)\geq g(x)$ 则$\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$

4. 绝对可积性：$f(x)$可积 则$|f(x)|$可积且$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,dx$

5. 区间可加性

积分第一中值定理：$f(x)$. $g(x)$在$[a,b]$可积、$g(x)$在$[a,b]$不变号

则$\exists\eta\in[m,M]$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\eta\int_a^b g(x)\,dx$

m, M为$f(x)$在$[a,b]$下上确界

若$f(x)\in C[a,b]$ 则$\exists\xi\in[a,b]$使 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

变上限积分性质：设$f(x)$在$[a,b]$可积、$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

1. $F(x)\in C[a,b]$

2. 若$f(x)\in C[a,b]$．则$F(x)$在$[a,b]$可微．$F'(x)=f(x)$

对积分上限求导法则：$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$

微积分基本定理(Newton-Leibniz)：$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$

分部积分法：$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

换元积分法：$f(x)\in C[a,b]$，$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（$[\beta,\alpha]$）上有连续导数

其值域包含于 $[a,b]$，满足 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

若奇，则为0

几何计算：

1. 面积：$\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|\,dt$ $\quad \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$

2. 弧长：$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ $\quad \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\,d\theta$$

3. 旋转体体积：$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$ $\quad \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)|x'(t)|\,dt$

$$\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta$$

4. 旋转曲面面积：$2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$$2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \qquad 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}\,d\theta$$

反常积分：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，且在任意有限区间 $[a,A]$

上可积，若 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，

且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$ $\quad$ 否则称其发散

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} F(x)\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty}(F(A)-F(a))$ 敛散性与 $\lim_{A\to+\infty} F(A)$ 等价

也记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}$

p-积分: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ $p>1$ 收敛于 $1/(p-1)$
$p\le 1$ 发散

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ $p<1$ 收敛于 $1/(1-p)$
$p\ge 1$ 发散

反常积分的Cauchy收敛原理: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon>0\ \exists A_0\ge 0\quad \forall A, A'\ge A_0$ 有 $\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

绝对收敛: $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,A]$ 可积, 且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛.
条件收敛: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛但不绝对收敛.
绝对收敛的反常积分一定收敛.

非负反常积分收敛比较判别法: $[a,+\infty)$ 上 $f(x)\ge 0$ $\varphi(x)\ge 0$
且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/\varphi(x) = l$
1. 若 $0\le l<+\infty$ 则 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ 收敛 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛
2. 若 $0<l\le+\infty$ 则 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ 发散 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也发散

非负反常积分收敛Cauchy判别法: $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\ge 0$
且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$
1. 若 $0\le l<+\infty$ 且 $p>1$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛
2. 若 $0<l\le+\infty$ 且 $p\le 1$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散

积分第二中值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调
则 $\exists \xi\in[a,b]$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$

若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单增. $g(a)\ge 0$ 则 $\exists \xi\in[a,b]$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$

若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单减. $g(b)\geq 0$ 则 $\exists\, \xi\in[a,b]$ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$

一般反常函数收敛判别法:

1. Abel 判别法: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调有界
   则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛
2. Dirichlet 判别法: $F(A)=\int_a^{A} f(x)\,dx$ 在 $[a,+\infty)$ 有界.
   $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛