TonyCrane 线性代数Ⅰ(H)

$a=(a_1,a_2,a_3)\quad b=(b_1,b_2,b_3)$

$a\times b=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

Abel群：包含运算满足交换律,结合律,且存在单位元和逆元.

线性空间：① 一个非空集合 V. 一个域 F.

② 有加法运算. 且 $\langle V,+\rangle$ 为一个Abel群

③ 有数乘运算 满足 $\forall\alpha,\beta\in V,\ \forall\lambda,\mu\in F$, 和单位元1

有：$1\alpha=\alpha\quad\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha\quad(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

④ 加法和数乘运算都封闭

线性组合,线性表示：设 $V(F)$ 为一线性空间. $\alpha_i\in V,\ \lambda_i\in F$

则向量 $\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$ 称为向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$

在域F上线性组合. α 在域F上可用向量组…线性表示

线性子空间：设W是线性空间 $V(F)$ 非空子集,如果W对V中运算也构成域F上的线性空间. 则称W为V的线性子空间

记 $W\leqslant V$

$W\leqslant V\iff W$ 对于 $V(F)$ 的线性运算

线性扩张：$L(S)=\{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k\mid\lambda_1,\cdots\lambda_k\in F,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in S,\ k\in\mathbb{N}^*\}$

$L(S)$ 是V中包含S的最小子空间

若V中存在有限子集S,使 $L(S)=V$ 则称V为有限维线性空间

线性相关：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. 指 $\exists$ 不全为0的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F$

使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\iff\alpha_1,\cdots\alpha_m$ 有一个向量可由其余向量在F上线性表示

$x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 有非零解 $\iff$ 线性相关. 否则线性无关

$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关n个向量. 则 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量

α 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示. 且表示法唯一.

设$V(F)$中向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$每一向量可由另一向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$线性表示. 如果$s>r$. 则$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$线性相关.

基、维数: 如果$V(F)$的有限子集$B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$线性无关. 且$L(B)=V$ 则称B为V的一组基. 并称n为V的维数. 记作$\dim V=n$

如果W是n维线性空间V的一个子空间. 则W的基可以扩充为V的基

秩: 设S是线性空间$V(F)$一个子集. 如果S中存在线性无关的向量组$B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 且S中每个向量可由B线性表示. 则B中向量个数r叫作S的秩. 记作 秩$(S)=r$

如果S是有限维线性空间$V(F)$子空间 则S的秩就是S的维数

坐标: 设$B=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$是$n$维线性空间$V(F)$一组基. 如果$V$中元素$\alpha$表示为$\alpha=a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_n\beta_n$ 则$\alpha_B=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为$\alpha$在基$B$下坐标

交与和 设W_1,W_2是线性空间$V(F)$两个子空间. 则

$$W_1\cap W_2=\{\alpha \mid \alpha\in W_1 \text{ 且 } \alpha\in W_2\}$$

$$W_1+W_2=\{\alpha \mid \alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\in W_1,\ \alpha_2\in W_2\}$$

交与和仍为$V(F)$子空间

维数公式: $\dim W_1+\dim V_2=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$

直和: 设W_1. W_2是$V(F)$子空间. 如果$W_1\cap W_2=\{0\}$ 则W_1+W_2叫做W_1与W_2直和. 记作$W_1\oplus W_2$

等价
- W_1+W_2是直和. 即$W_1\cap W_2=0$
- W_1+W_2中每个向量α分解式$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ $(\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_1)$唯一.
- 零向量分解式$0=\alpha_1+\alpha_2$ $(\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2)$当且仅当$\alpha_1=\alpha_2=0$成立
- $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$

内积空间: 在实空间$V(R)$定义一个二元运算, 使V中元素$\alpha.\beta$与一个

实数对应，记作 (α,β) 如果 $\forall \alpha,\beta\in V,\lambda\in\mathbb{R}$ 满足：

$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$ $(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$

$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$ 等号成立当且仅当 $\alpha=0$ （对称正定双线性）

则称实数 (α,β) 为 α,β 内积，定义了内积的 $V(\mathbb{R})$ 称为实内积空间

有限维实内积空间叫欧氏空间

向量长度：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

常用内积：$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

Cauchy-Schwarz 不等式：$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$

向量夹角：$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

（非零向量）α,β 正交 $(\alpha\perp\beta)$ 当且仅当 $(\alpha,\beta)=0$

内积空间 $V(\mathbb{R})$ 中两两正交非零向量组 $S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 线性无关

<u>单位正交基</u>：设 $B=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 是 n 维欧式空间 $V(\mathbb{R})$ 一个子集，如果 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 则称 B 为 V 的单位正交基

（单位长，两两正交）

欧式空间 $V(\mathbb{R})$ 恒有单位正交基

<u>Schmidt 正交化</u>：设 $B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维欧式空间 $V(\mathbb{R})$ 一组基

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$\varepsilon_m=\beta_m/|\beta_m|$ $m=1,2,\cdots,n$

则 $B^*=\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 为 $V(\mathbb{R})$ 的单位正交基

设 $\alpha\in V(\mathbb{R})$ $W\leqslant V(\mathbb{R})$ 如果 $\forall\gamma\in W$，有 $(\alpha,\gamma)=0$ 则称 α 与 W 正交 $(\alpha\perp W)$

设 $W_1,W_2\leqslant V(\mathbb{R})$ 若 $\forall\alpha\in W_1,\beta\in W_2$，$(\alpha,\beta)=0$ 则 W_1 与 W_2 正交 $(W_1\perp W_2)$

若 $W_1\perp W_2$ 则 $W_1\cap W_2=\{0\}$，$W_1\oplus W_2$

若 $W_1, W_2 \leq V(\mathbb{R})$ $W_1 \perp W_2$ $W_1 + W_2 = V$ 则称 W_2 为 W_1 正交补, 记为 $W_1^{\perp}$

如果 W_1 是 n 维欧式空间 $V(\mathbb{R})$ 子空间. 则 $W_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V 且 \alpha \perp W_1\}$ 为 W_1 正交补

$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

<u>线性映射</u>: $\forall \alpha, \beta \in V_1$ $\forall \lambda, \mu \in F$, 有 $\sigma(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\sigma(\alpha) + \mu\sigma(\beta)$

则映射 $\sigma: V_1(F) \to V_2(F)$ 是线性的

性质: $\sigma(\sum \lambda_i \alpha_i) = \sum(\lambda_i \sigma(\alpha_i))$

若 $V_1(F)$ 中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 则像 $\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_m)$ 也线性相关

<u>像和核</u>: 设 $\sigma: V_1(F) \to V_2(F)$

像: $\mathrm{Im}\sigma = \sigma(V_1) = \{\beta \mid \beta = \sigma(\alpha), \alpha \in V_1\}$

核: $\mathrm{Ker}\sigma = \sigma^{-1}(0_2) = \{\alpha \mid \sigma(\alpha) = 0_2, \alpha \in V_1\}$ 0_2 为 V_2 零元.

$\sigma: V_1 \to V_2$ 为单射 $\Leftrightarrow$ $\sigma^{-1}(0_2) = \{0_1\}$

求像: 出发空间基代入 σ, 得到结果的极大线性无关组即像空间的基.

求核: 即求 $\sigma(\alpha) = 0_2$ 解空间

$V_1(F)$ 到 $V_2(F)$ 所有线性映射构成集合, 记为 $L(V_1, V_2)$ 也是线性空间

$(\sigma + \tau)(\alpha) = \sigma(\alpha) + \tau(\alpha)$ $\quad (\lambda\sigma)(\alpha) = \lambda(\sigma(\alpha))$

<u>线性映射的秩</u>: 设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$ 如果 $\sigma(V_1)$ 是 V_2 的有限维子空间, 则 $\sigma(V_1)$ 维数称为 σ 的秩, 记作 $r(\sigma)$ 即 $r(\sigma) = \dim\sigma(V_1)$

<u>像与核的维数公式</u>: 设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$ $\dim V_1 = n$

则 $r(\sigma) + \dim\ker\sigma = n$

设 $\sigma \in L(V_1, V_2)$ 如果 V_1, V_2 都是 n 维线性空间, 则:

$r(\sigma) = n$ (满秩) $\Leftrightarrow$ σ 是单射 $\Leftrightarrow$ σ 是满射 $\Leftrightarrow$ σ 可逆

<u>同构</u>: 如果由 $V_1(F)$ 到 $V_2(F)$ 存在一个线性双射 σ, 则 $V_1(F)$ 和 $V_2(F)$ 是同构的, 记 $V_1(F) \cong V_2(F)$ σ 叫 $V_1(F)$ 到 $V_2(F)$ 一个同构

$V_1(F)$ 和 $V_2(F)$ $\Leftrightarrow$ $\dim V_1(F) = \dim V_2(F)$

矩阵：$A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$ （m行 n列）

$L(V,W)\cong F^{\dim W\times \dim V}$

线性映射矩阵表示：$B_1=\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 为 $V_1(F)$ 基 $B_2=\{e_1,\cdots,e_m\}$ 为 $V_2(F)$ 基 $\sigma(B_1)=\{\sigma(\varepsilon_1),\dots,\sigma(\varepsilon_n)\}$ 唯一.

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_1)=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{m1}e_m\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \sigma(\varepsilon_n)=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\cdots+a_{mn}e_m\end{cases}$$

则 $M(\sigma)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为 σ 关于基 B_1, B_2 的矩阵.

矩阵乘法：$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$ A列=B行

$(AB)C=A(BC)$ $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$

$A(B+C)=AB+AC$ $(B+C)P=BP+CP$

1. 不一定满足交换律
2. $A\neq 0$ $B\neq 0$ 不能推 $AB\neq 0$
3. $AC=BC$ 不一定 $A=B$ （C可逆时一定）

$A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$

$AB=BA=\mathrm{diag}(a_1b_1,\cdots,a_nb_n)$

可逆矩阵：设 $A\in M_n(F)$ 如果 $\exists\, B\in M_n(F)$ 使 $BA=AB=E$

则称 A 可逆，B 为 A 逆矩阵（且唯一）记为 $B=A^{-1}$

主对角元都是非零数的对角阵可逆，且

$\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)^{-1}=\mathrm{diag}(a_1^{-1},\cdots,a_n^{-1})$

有一行全为0的方阵不可逆

若 $A,B\in M_n(F)$ 可逆 $\lambda\in F$ $(\lambda\neq 0)$ 则 λA, AB 可逆，且

$(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$ $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

上(下)三角矩阵可逆 $\Leftrightarrow$ 主对角元均不为0.（且逆矩阵仍为上(下)三角）

转置：$(A^T)^T=A$ $\quad (A+B)^T=A^T+B^T$

$(\lambda A)^T=\lambda A^T \quad (AB)^T=B^TA^T \quad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$(A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_2^TA_1^T$

若 $\forall i,j=1,\cdots,n$ 均有 $a_{ij}=a_{ji}$ 则 A 为对称矩阵. $\Leftrightarrow A^T=A$

若 $\forall i,j=1,\cdots,n$ 均有 $a_{ij}=-a_{ji}$ 则 A 为反对称矩阵. $\Leftrightarrow A^T=-A$

一个矩阵一定可以表示为一个对称～和一个反对称～和的形式

初等变换：c乘i行 $e_i^c(A)$ $\quad$ c乘i列 $\bar{e}_i^c(B)$

i行乘c加到j行 $e_{ij}^c(A)$ $\quad$ j列乘c加到i列 $\bar{e}_{ij}^c(B)$

i,j行对换 $e_{ij}(A)$ $\quad$ j,i列对换 $\bar{e}_{ij}(B)$

初等矩阵：倍乘 $E_i(c)$ 倍加 $E_{ij}(c)$ 对换 E_{ij}

$$E_i(c)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}\ i行 \qquad E_{ij}(c)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & c & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \qquad E_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$e_i^c(A)=E_i(c)A \quad e_{ij}^c(A)=E_{ij}(c)A \quad e_{ij}(A)=E_{ij}A$

$\bar{e}_i^c(B)=BE_i(c) \quad \bar{e}_{ij}^c(B)=BE_{ij}(c) \quad \bar{e}_{ij}(B)=BE_{ij}$

$E_i^{-1}(c)=E_i(\frac{1}{c}) \quad E_{ij}^{-1}(c)=E_{ij}(-c) \quad E_{ij}^{-1}=E_{ij}$

A 可逆当且仅当 $A=P_1P_2\cdots P_n$ $\quad P_i$ 为初等矩阵.

$(A,E)\xrightarrow{\text{初等行}}(E,A^{-1})$

矩阵的秩：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是 σ 对应矩阵.则 A 的秩 $r(A)=r(\sigma)$

A n 个列向量的秩称为 A 的列秩.

A m 个行向量的秩称为 A 的行秩.

且 $r(A)=A$ 行秩 $=A$ 列秩

阶梯矩阵秩为非零行行数

初等行(列)变换不改变矩阵的秩

求秩 → 初等行变换 → 非零行数

若 $r(A_{m\times n})=r$. 则存在可逆矩阵 P.Q. 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=U_r$$

<u>相抵</u>：设 $A.B\in M_{m\times n}(F)$ 如果A经初等变换可化为B.则称A相抵于B. 记为 $A\cong B \iff r(A)=r(B)$

U_r 称为A的相抵标准形

设 $A\in M_n(F)$ 则 A可逆 $\iff r(A)=n \iff$ A的n个行(列)向量线性无关 $\iff$ 齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解.

$r(A+B)\leq r(A)+r(B) \qquad r(AB)\leq \min(r(A),r(B))$

$A\in F^{m\times n} \quad B\in F^{n\times s}$ 则 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$

若 $AB=0$ 则 $n\geq r(A)+r(B)$

$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B) \qquad r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$

<u>分块矩阵</u>：$A=(A_{kl})_{s\times t}$ A_{kl} 称为A的子块

加法,数乘,乘法均类似矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}$$ 大转置小转置.都要转置.

$A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_m)$ 可逆 $\iff$ A_i 均可逆,

且有 $A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},\cdots,A_m^{-1})$

$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆 $\iff$ B.D都可逆 且有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$

<u>基的变换矩阵</u>：$B_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ $B_2=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 为 $V(F)$ 两组基.

$$\begin{cases} \beta_1=a_{11}\alpha_1+\cdots+a_{n1}\alpha_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \beta_n=a_{1n}\alpha_1+\cdots+a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

则 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称基 B_1 变为 B_2 的变换矩阵(过渡矩阵) 其一定可逆

$\forall \xi\in V(F) \quad \xi_{B_2}=A^{-1}\xi_{B_1}$

行列式公理化定义：线性、反对称性、规范性。

性质：1. 有一列为0，则行列式值为0

2. 有两列相同/成比例，行列式值为0

3. 倍加列变换不改变值

4. 若 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 线性相关，则 $D(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=0$

5. 设 $A\in M_n(F)$ 则 $|A^T|=|A|$

$|E_i(c)|=c \quad |E_{ij}|=-1 \quad |E_{ij}(c)|=1$

若 P_i 为初等矩阵，则 $|AP_1P_2\cdots P_k|=|A||P_1||P_2|\cdots|P_k|$

余子式：$D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 中去掉 a_{ij} 所在 i 行 j 列的所有元素得到 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。把数 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式

按行(列)展开：设 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$，则：

$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ 对 j 列展开

$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ 对 i 行展开

$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{ik}=\delta_{ij}D \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}A & 0\\ C & B\end{vmatrix}=|A||B|$ (对A的阶归纳)

$D=\begin{vmatrix}A & C_1\\ 0 & B\end{vmatrix}=|A||B| \quad D=\begin{vmatrix}0 & A\\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{k\times m}\begin{vmatrix}A & 0\\ C & B\end{vmatrix} \quad C\in M_{m\times k}$

$a\times b=\begin{vmatrix}i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$

设 $A,B\in M_n(F)$ 则 $|AB|=|A||B|$

A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

子式.主子式 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 任意k行 $(i_1<i_2<\cdots<i_k)$ k列 $(j_1<j_2<\cdots<j_k)$ 的交点上的 k^2 个元素排成行列式 $|a_{i_kj_k}|$ 称A的k阶子式

当其值为0时称为k阶零子式，当A为方阵且 $j_t=i_t$ 时，称为A的k阶主子式

行列式的秩 A的非零子式最高阶数

$r(A)=r \Leftrightarrow r(|A|)=r \quad r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$

$AA^*=A^*A=|A|E. \qquad |A^*|=|A|^{n-1}$

$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

A可逆时 $(AB)^*=B^*A^* \quad (A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

$(A^T)^*=(A^*)^T$

$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

Cramer 法则：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 若 $|A|\neq 0$ 则 $AX=b$ 有唯一解

且 $x_j=\frac{D_j}{D}$ 其中 $D=|A|$ D_j 为把D中j列替换为b.

$AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow r(A)<n$

设 $A\in M_{m\times n}(F)$ 若 $r(A)=r$ 则 $AX=0$ 解空间 $N(A)$ 是 F^n 一个 $n-r$ 维子空间

以 $m\times n$ 矩阵A为系数齐次线性 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

<u>基础解系</u>：$AX=0$ 解空间 $N(A)$ 的基 $X_1,X_2,\cdots,X_p$

$N(A)=L(X_1,\cdots,X_p) \quad X=k_1X_1+\cdots+k_pX_p$ 称 $AX=0$ 一般解.

A n个列向量张成列空间 $R(A)$ 行向量张成行空间 $R(A^T)$

$r(A)+\dim N(A)=n$ (列数) $\qquad N(A)=(R(A^T))^{\perp}$

对非齐次线性方程组 $AX=b$，$AX=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ b可被A列向量组线性表示.

$\Leftrightarrow r(A,b)=r(A)$

若 $AX=b$ 有解，则其一般解为 $X=X_0+\bar{X}$ 其中 X_0 是任一个特解.

$\bar{X}$ 是 $AX=0$ 一般解.

<u>正交变换</u> 若 $\forall\alpha,\beta\in V$，有 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$ 则 σ 为正交变换.

$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta) \Leftrightarrow |\sigma(\alpha)|=|\alpha|$

正交矩阵：正交变换σ关于V单位正交基对应的矩阵A

A的列向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是关于$\mathbb{R}^n$标准内积的一组单位正交基

又可定义为若$A^TA=E$，则A为正交矩阵。

性质：1. $A^{-1}=A^T$　2. $|A|=1$或-1　3. A, B都正交，AB也正交。

设$\sigma \in L(V,V)$　$B_1=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$　$B_2=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$是$V(F)$两组基

基B_1变为B_2的变换矩阵为C。如果σ在基B_1下矩阵为A，则

σ关于基B_2矩阵为$C^{-1}AC$

如果对于$A, B \in M_n(F)$，$\exists$可逆矩阵$C \in M_n(F)$使$C^{-1}AC=B$，

则称A相似于B，记作$A \sim B$

$C^{-1}(kA+tB)C = kC^{-1}AC + tC^{-1}BC$

$C^{-1}(AB)C = (C^{-1}AC)(C^{-1}BC)$

$A \sim B$ 则$A^m \sim B^m$　　若$A \sim B$则$f(A) \sim f(B)$

特征值、特征向量：设$\sigma \in L(V,V)$ 若$\exists \lambda_0 \in F$，非零向量$\xi \in V$使

$\sigma(\xi)=\lambda_0\xi$ 则称λ_0为σ一个特征值，ξ为σ的属于其特征

值λ_0的特征向量。

记$A \in M_n(F)$ 若$\exists \lambda_0 \in F$，$X \in F^n \setminus \{0\}$，使$AX=\lambda_0 X$，则称$\lambda_0$为

A的一个特征值. ...

$f(\lambda)=|\lambda E - A|$ 称A特征多项式　$|\lambda E - A|=0$ 称A特征方程

$V_{\lambda_0}=\{\xi \mid \sigma(\xi)=\lambda_0\xi, \xi \in V\}$称$\sigma$关于$\lambda_0$特征子空间

$A=(a_{ij})_{n\times n}$特征多项式为$f(\lambda)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$.

其中$b_k=(-1)^k S_k$. S_k为A全体k阶主子式之和.

若$A=(a_{ij})_{n\times n}$ n个特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$　$\prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$

若$A \sim B$，则$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$

$\dim(V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}+\cdots+V_{\lambda_m}) = \sum_{j=1}^m \dim V_{\lambda_j}$

若$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$是$\sigma$的互不相同特征值. 则 $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} = \{0\}$

σ不同特征值对应特征向量线性无关.

σ不同特征值的特征子空间的基向量合在一起构成的向量组
线性无关.

<u>对角化</u> 若$\sigma \in L(V,V)$在某个基下对应矩阵为对角阵.则称σ可对角化

与对角阵相似矩阵称为可对角化矩阵.

n维线性变换σ可对角化 $\Leftrightarrow$ σ有n个线性无关特征向量.

若σ有n个互不相同特征值. 则σ可对角化

n维线性空间$V(F)$线性变换σ每个特征值λ_i重数$\geq V_{\lambda_i}$维数.

σ可对角化 $\Leftrightarrow$ 每个特征值重数$= \dim V_{\lambda_i}$ 且σ不同特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$
重数之和为n

求P使$P^{-1}AP = \Lambda$. 1. 求A所有特征值. 2. 求V_{λ_i}基$\{X_{i1}, \cdots, X_{ir_i}\}$
按列排成 $P = (X_{11}, \cdots, X_{1r_1}, \cdots, X_{m1}, \cdots, X_{mr_m})$

有 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_m, \cdots, \lambda_m)$

与A相似的对角阵Λ称为A的相似标准形

实对称矩阵特征值都是实数.

实对称矩阵不同特征值的特征向量是正交的

若A是n阶实对称. 则$\exists$ n阶正交矩阵Q使$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

求Q: 把不同特征子空间单位正交基按列排成Q.

<u>二次型</u>: $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X$

其中$X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ $A = (a_{ij})_{n \times n}$为实对称. 则$A$为二次型的矩阵.

对$\forall$实对称A. $\exists$可逆C使$C^TAC = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$称为相合标准形

<u>主轴定理</u>: $\forall$二次型$f(x_1, \cdots, x_n) = X^TAX$ $\exists$正交变换$X = QY$使
$X^TAX = Y^T(Q^TAQ)Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

其中λ_i为n个特征值 Q的n个列向量为A属于$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$的$n$个单位正交特征向量

相合规范形 A的相合标准形 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$

其中1、−1个数称A的正惯性指数和负~

$r(A)=r(\Lambda)=$ A的正、负惯性指数之和

正定二次型、正定矩阵：如果 $\forall X\neq 0$，恒有 $X^TAX>0$，则称n元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为正定二次型，A称正定矩阵。

1. n元实二次型(标准形) $f(x_1,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2$ 正定 $\Leftrightarrow d_i>0$

2. 对正定二次型 $f=X^TAX$ 作坐标变换 $X=CY$，得 $f=Y^T(C^TAC)Y$ 也正定

X^TAX 是正定二次型(A是正定矩阵) $\Leftrightarrow$ A正惯性指数为n，即 $A\simeq E$

$\Leftrightarrow \exists$ 可逆P，使 $A=P^TP$ $\Leftrightarrow$ A的n个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 均大于0

若 X^TAX 正定，则主对角元 $a_{ii}>0$，行列式 $|A|>0$

X^TAX 正定 $\Leftrightarrow$ A的n个顺序主子式都大于0，即 $\det\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}>0$

若 $\forall X\neq 0$ 恒有

1. $X^TAX<0$ 称之为负定二次型，A为负定矩阵
2. $X^TAX\geq 0$ 〃 半正定 〃 半正定
3. $X^TAX\leq 0$ 〃 半负定 〃 半负定