TonyCrane 数学分析(甲)Ⅱ(H)

数项级数

$\{x_n\}$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S. 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛 和为 S.
发散. 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 发散.

p 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛. $0<p\leq 1$ 时发散到 $+\infty$.

级数收敛必要条件: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

线性性、收敛级数满足加法结合律.

$\{x_n\}$ 中若存在一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 有 $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \xi$. 则称 ξ 为 $\{x_n\}$ 一极限点.

记 $E=\{\xi \mid \xi$ 是 $\{x_n\}$ 极限点$\}$ 非空有界. 则 $H=\sup E=\max E$ $h=\inf E=\min E$

记 $H=\max E=\overline{\lim_{n\to+\infty}} x_n$ 上极限 $h=\min E=\underline{\lim_{n\to+\infty}} x_n$ 下极限.

有界数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

$\overline{\lim} x_n = H \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,$ $\begin{cases} \exists N\in\mathbb{Z}^+ \ \forall n>N,\ x_n<H+\varepsilon \\ \{x_n\} \text{中有无穷多项满足 } x_n>H-\varepsilon \end{cases}$

$\underline{\lim} x_n = h \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$ $\begin{cases} \exists N\in\mathbb{Z}^+ \ \forall n>N\ \ x_n>h-\varepsilon. \\ \{x_n\} \text{中有无穷多项满足 } x_n<h+\varepsilon \end{cases}$

上下极限运算. $\overline{\lim}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$ $\underline{\lim}(x_n+y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$

若 $\lim x_n$ 存在 则 $\overline{\lim}(x_n+y_n) = \lim x_n + \overline{\lim} y_n$. 下同理.

若 $x_n\geq 0$ $y_n\geq 0$ 则 $\overline{\lim}(x_n y_n) \leq \overline{\lim} x_n \cdot \overline{\lim} y_n$

$\underline{\lim}(x_n y_n) \geq \underline{\lim} x_n \cdot \underline{\lim} y_n$

若 $\lim x_n = x \in (0,+\infty)$ 则 取等.

正项级数收敛原理. 正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列有上界

比较判别法. 正项级数 $\sum x_n$ $\sum y_n$. 若 $\exists A>0$ s.t. $x_n \leq A y_n$ 则

当 $\sum y_n$ 收敛. $\sum x_n$ 收敛; $\sum x_n$ 发散. 则 $\sum y_n$ 发散

∘ 极限形式. $\lim_{n\to+\infty} x_n/y_n = l$ $l\in[0,+\infty]$

若 $l\in[0,+\infty)$ 则 $\sum y_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum x_n$ 收敛.

若 $l\in(0,+\infty]$ 则 $\sum y_n$ 发散 $\Rightarrow \sum x_n$ 发散. $l\in(0,+\infty)$ 同敛散

更广

Cauchy 判别法. 正项级数 $\sum x_n$. $r = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{x_n}$ 则

$r<1$ 时 $\sum x_n$ 收敛　$r>1$ $\sum x_n$ 发散　$r=1$ 失效.

d'Alembert 判别法 正项级数 $\sum x_n$ $\overline{\lim} \, x_{n+1}/x_n = \overline{r}$　$\underline{\lim} \, x_{n+1}/x_n = \underline{r}$

$\overline{r} < 1$ $\sum x_n$ 收敛，$\underline{r} > 1$ $\sum x_n$ 发散　$\overline{r} \geq 1$ 或 $\underline{r} \leq 1$ 失效.

Raabe 判别法 正项级数 $\sum x_n$ $\lim n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r$. 则

$r>1$ $\sum x_n$ 收敛　$r<1$ $\sum x_n$ 发散　$r=1$ 失效.

积分判别法. 令 $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$ 则

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与正项级数 $\sum u_n$ 同敛散 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \sum u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx$

任意项级数 Cauchy 收敛原理. $\sum x_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{Z}^+$

$\forall m > n > N$. 有 $|x_{n+1} + \cdots + x_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon$.

交错级数. $\sum x_n = \sum (-1)^{n+1} u_n$ $(u_n > 0)$

若交错级数中 u_n 单减收敛于 0. 则称为 Leibniz 级数. $\Leftarrow$ 必收敛.

Abel 变换. 两数列 $\{a_n\}\{b_n\}$. 记 $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ 则

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

Abel 引理. $\{a_k\}$ 单调. $\{B_k\}$ 有界 $(\exists M > 0\ \forall k.\ |B_k| \leq M)$ 则

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leq M(|a_1| + 2|a_p|)$$

Abel 判别法. $\{a_n\}$ 单调有界. $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum a_n b_n$ 收敛.

Dirichlet 判别法 $\{a_n\}$ 单调趋于 0. $\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i\right\}$ 有界 $\Rightarrow$ $\sum a_n b_n$ 收敛.

若 $\sum |x_n|$ 收敛. 则称 $\sum x_n$ 绝对收敛. 若 $\sum x_n$ 收敛. $\sum |x_n|$ 发散. 则称 $\sum x_n$ 条件收敛

令 $x_n^+ = \frac{1}{2}(|x_n| + x_n) = \begin{cases} x_n & x_n > 0 \\ 0 & x_n \leq 0 \end{cases}$　$x_n^- = \frac{1}{2}(|x_n| - x_n) = \begin{cases} -x_n & x_n < 0 \\ 0 & x_n \geq 0 \end{cases}$

则 $x_n = x_n^+ - x_n^-$　$|x_n| = x_n^+ + x_n^-$

若 $\sum x_n$ 绝对收敛. 则 $\sum x_n^+$ $\sum x_n^-$ 都收敛.

若 $\sum x_n$ 条件收敛 则 $\sum x_n^+$ $\sum x_n^-$ 都发散到 $+\infty$

若 $\sum x_n$ 绝对收敛 则更序级数 $\sum x_n'$ 也绝对收敛 且 $\sum x_n' = \sum x_n$

Riemann 定理 $\sum x_n$ 条件收敛. $\forall a\in[-\infty,+\infty]$. 必存在更序级数 $\sum x_n' = a$

Cauchy 乘积. $\sum c_n = \sum (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1)$

若 $\sum a_n$ $\sum b_n$ 绝对收敛. 将 $a_i b_j$ 按任意方式排列. 求和的级数也绝对收敛. 且其和等于 $(\sum a_n)(\sum b_n)$

函数项级数

设 $u_n(x)$ 在 E 上定义. 对 $\forall$ 固定 $x_0\in E$. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛. 则称 $\sum u_n(x)$ 在点 x_0 收敛. x_0 为 $\sum u_n(x)$ 收敛点. 所有收敛点的集合 $\rightarrow$ 收敛域

设 $\sum u_n(x)$ 收敛域 $D\subset E$. $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $x\in D$ 为 $\sum u_n(x)$ 和函数.
称 $\sum u_n(x)$ 在 D 上点态收敛到 $S(x)$

部分和函数 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ $x\in E$. $S(x)=\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$

一致收敛 设 $\{S_n(x)\}$ $x\in D$ 是一函数序列 若 $\forall \varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{Z}^+$ $\forall n>N(\varepsilon)$ $\forall x\in D$. $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 记为 $S_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$

若 $\sum u_n(x)$ 部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 则称 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(S_n, S) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x)-S(x)| = 0$

若 $\forall [a,b]\subset D$. $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 $S(x)$ 一致 — 定内闭一致.

设 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上点态收敛于 $S(x)$ 则 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ $\Leftrightarrow \forall \{x_n\}$ $x_n\in D$. $\lim_{n\to+\infty}(S_n(x_n)-S(x_n))=0$

一致收敛的 Cauchy 收敛原理. $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon>0$. $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{Z}^+$ s.t. $\forall m>n>N$, $x\in D$, $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_m(x)|<\varepsilon$

$\{S_n(x)\}$ 在 D 一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{Z}^+$. $\forall m>n>N$ $\forall x\in D$.
$|S_m(x)-S_n(x)|<\varepsilon$.

Weierstrass 判别法 设 $\sum u_n(x)$ 每项都满足 $|u_n(x)| \le a_n \quad x \in D$

且 $\sum a_n$ 收敛. 则 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛. $\sum |u_n(x)|$ 也一致收敛

A-D 判别法

Abel 判别法. $\{a_n(x)\}$ 对每一固定 $x \in D$. 关于 n 单调且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致有界. ($|a_n(x)| \le M \quad x \in D \quad n \in \mathbb{N}^+$) $\sum b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

则 $\sum a_n(x) b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

Dirichlet 判别法. $\{a_n(x)\}$ 对每一固定 $x \in D$ 关于 n 单调. 且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0. $\sum b_n(x)$ 部分和序列在 D 上一致有界. 则 ---

一致收敛函数性质

连续性: $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $S(x)$ 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续. $\lim\limits_{x \to x_0} \sum u_n(x) = \sum \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$

可积性: . . . . $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. $\int_a^b S(x)\,dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$

逐项积分: $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum u_n(x)\,dx = \sum \int_a^b u_n(x)\,dx$

可微性: $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续导函数 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 点态收敛于 $S(x)$ $\{S'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $\sigma(x)$ 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可导. 且

$\frac{d}{dx} S(x) = \sigma(x)$

逐项求导. $\frac{d}{dx} \sum u_n(x) = \sum \frac{d}{dx} u_n(x)$

Dini 定理. $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 点态收敛于 $S(x)$ 若 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调 则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $S(x)$

幂级数: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

收敛半径: 令 $A = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ 定义 $R = \begin{cases} +\infty & A = 0 \\ \frac{1}{A} & A \in (0,+\infty) \\ 0 & A = +\infty. \end{cases}$ R 称 收敛半径

Cauchy-Hadmard 定理. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < R$ $(R>0)$ 时绝对收敛. $|x|>R$ 发散.

d'Alembert 判别法, 如果 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 成立 $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_{n+1}/a_n| = A$ 则 $R = \frac{1}{A}$

Abel 第二定理. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛半径 R. 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内闭一致收敛.

若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 收敛. 则它在 $\forall [a,R] \subset [-R,R]$ 一致收敛. (负同理)

幂级数性质. 连续性. 逐项可积性. 逐项可导性.

Taylor级数. $f(x)$ 在 x_0 处 Taylor级数: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 $O(x_0,\rho)$ 成立 $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} r_n(x)=0$

这时称 ... 为 $f(x)$ 在 $O(x_0,\rho)$ 上 Taylor展开.

Lagrange余项 $r_n=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad \theta\in(0,1)$

积分形式: $r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

Cauchy 余项 $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\quad \theta\in[0,1]$

$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\qquad (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$

$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!\ x^{2n+1}}{(2n)!!\ (2n+1)}$

Euclid 空间上的极限和连续

$\exists x$ 一个邻域 $O(x,\delta)$ 完全落在 S 中. 称 x 为 S 内点. 所有内点构成内部 S°

$\exists x$ 一个 ,, 完全不 ,, ,, 外点.

$\forall x$ 的邻域既包含 S 中点,又包含不属于 S 的点, 称 x 为 S 边界点. 所有边界点构成 S 边界 ∂S

$\exists x$ 一个邻域, 只有 x 属于 S. 则 x 是 S 孤立点.

$\forall x$ 邻域都有 S 中无限个点. 则 x 是 S 聚点. 所有聚点构成 S'

x 是 S 聚点 $\Leftrightarrow \exists\{x_k\}\ x_k\in S.\ x_k\neq x\ (k=1,2,\cdots)$ s.t. $\lim_{k\to+\infty}x_k=x$

若 S 每一个点都是内点. 则 S 为开集. S 包含了所有聚点. 则 S 为闭集.

S 与聚点全体 S' 并集称 S 的闭包 $\overline{S}$

S 是闭集 $\Leftrightarrow S^c$ 是开集.

有界闭集 即 紧集.

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 上开集 $X_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 为一点，$z=f(x)$ 是 $D\setminus\{x_0\}$ 上 n元函数. A 为实数. $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$.
有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 称 x 趋于 x_0 时 f 收敛. A 为 f 当 $x\to x_0$ 时 n重极限
记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. $\lim\limits_{x_1\to x_1^0\cdots x_n\to x_n^0}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A$

累次极限. $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ $\quad\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 极限不一定可交换次序

若 $f(x,y)$ 二重极限和两个二次极限均存在. 则必相等

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 则 f 在 x_0 处连续.

连续映射将紧集映射为紧集 紧集上连续函数有界 有最值

连通开集称为(开)区域, 其闭包称为闭区域

连续映射将连通集映射为连通集. 连续函数将连通紧集映射为闭区间

多元函数微分学

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$ f 在 (x_0,y_0) 关于 x 偏导数

$\partial f/\partial x$ f 关于 x 偏导函数. 又可记为 $f_x'(x,y)$

$\vec{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 为一个方向. 方向导数:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

全增量. $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

若 $\exists$ 仅与 (x_0,y_0) 有关的 A. B. 使 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ 则称 f 在 (x_0,y_0) 处可微. $A\Delta x+B\Delta y$ 为 f 在 (x_0,y_0) 处全微分, 记作 $dz(x_0,y_0)$ 或 $df(x_0,y_0)$ $\quad dz(x_0,y_0)=Adx+Bdy$.

可微必连续. 可微必可求偏导.

全微分公式. $$df(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

f在(x_0,y_0)可微，则任意方向$\vec{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$方向导数存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha$$

$u=f(x_1,\cdots,x_n)$ $\quad du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

f在(x_0,y_0)某邻域存在偏导数，且偏导数连续，则f在(x_0,y_0)可微

梯度 $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\vec{i}+f_y'(x_0,y_0)\vec{j}$

$\partial f/\partial\vec{v}\,(x_0,y_0)=\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}=\|\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)\|\cos(\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0),\vec{v})$

若f的两个混合偏导数f_{xy}''和f_{yx}''在(x_0,y_0)连续，则$f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0)$

高阶微分 $\quad dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)z \qquad d^2z=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2z$

向量值函数 坐标分量 $y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n)$

向量值函数导数 Jacobi矩阵

$$f'(x^0)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0)\end{pmatrix}$$

$Df(x^0)$

$J_f(x^0)$

f在x^0点可微$\Leftrightarrow$ f坐标分量函数都在x^0可微，有$dy=f'(x^0)dx$

<u>链式法则</u> $\quad z=f(x,y)\quad (x,y)\in D_f\subset\mathbb{R}^2 \quad g:D_g\to\mathbb{R}^2\quad (u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$

$z=f\circ g=f(x(u,v),y(u,v))\quad (u,v)\in D_g$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial v}$同理

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$

$$(f\circ\vec{g})'(x^0)=f'(\vec{g}(x^0))\,\vec{g}'(x^0)$$

凸区域：$\forall x_0,x_1\in D$，$\lambda\in[0,1]$，有 $x_0+\lambda(x_1-x_0)\in D$.

中值定理：f在凸区域$D\subset\mathbb{R}^2$上可微，$\forall (x_0,y_0)$ $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta x)\in D$

$\exists\,\theta\in(0,1)$ s.t. $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x$

$\quad +f_y'(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$

Taylor公式 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$
$+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+R_k$

$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ Largrange余项

一元隐函数存在定理. 若二元函数 $F(x,y)$ 满足 (1) $F(x_0,y_0)=0$

(2) 在闭矩形 $D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$ 上 $F(x,y)$ 连续且有连续偏导数

(3) $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$ 那么在点 (x_0,y_0) 附近可以从 $F(x,y)=0$ 惟一确定隐函数 $y=f(x)$ $x\in O(x_0,\rho)$ 满足 $F(x,f(x))=0$ $y_0=f(x_0)$ 且 f 在 $O(x_0,\rho)$ 上连续. 有连续导数 $dy/dx=-F_x'(x,y)/F_y'(x,y)$

多元隐函数存在定理. 类似一元

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}'(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_y'(x_1,\cdots,x_n,y)} \quad i=1,2,\cdots,n$$

$F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 对 x_i 求偏导: $\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}=0$ $\quad \frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}'}{F_y'}$

多元向量值隐函数存在定理. $F(x,y,u,v)$ $G(x,y,u,v)$ 满足

(1) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ $\quad G$ 同理

(2) 在闭长方体 D 内 F,G 连续 有连续偏导数

(3) 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点 $\partial(F,G)/\partial(u,v)=\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}\neq 0$

则在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点附近可从 $F=0$ $G=0$ 惟一确定隐函数

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_x' & F_y'\\ G_x' & G_y'\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}$$ $F_1,\cdots,F_m$ 关于 $y_1,\cdots,y_m$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=-\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_{k-1},x_j,y_{k+1},\cdots,y_m)}\Big/\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}$$

空间曲线 $r(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

切线：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$ 切向量 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

法平面：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

空间曲线 $F(x,y,z)=0$ $G(x,y,z)=0$ 交

切线：$\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)}=\dfrac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)}$ 法平面同理

法平面是由 $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(P_0)$ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}G(P_0)$ 张成平面.

曲面 $F(x,y,z)=0$

切平面 $F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0$

法线 $\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}$

x_0 为 f 极值点 $\Rightarrow$ x_0 为驻点 即各个一阶偏导数均为 0

设 (x_0,y_0) 为 f 驻点，f 在 (x_0,y_0) 附近有二阶连续偏导数.

记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$ $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$ $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

记 $H=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$

若 $H>0$ 则 $A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极小值. $A<0$ 时为极大值 $H<0$ 非极值

多元函数 $a_{ij}=f''_{x_ix_j}(\vec{x_0})$ $k=1,\cdots,n$

$A_k=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{k2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{pmatrix}$ Hessian 矩阵

$\det A_k>0$ 正定 极小

$(-1)^k\det A_k>0$ 负定 极大

条件极值必要条件 若 $\vec{x_0}$ 为 $f(x)$ 满足约束条件的条件极值点，则 ∃ m 个常数 λ_i 使在 $\vec{x_0}$ 处成立 $\overrightarrow{grad} f = \lambda_1 \overrightarrow{grad}\, g_1 + \cdots + \lambda_m \overrightarrow{grad}\, g_m$

Lagrange 乘数法 构造 Lagrange 函数：

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m) = f(x_1,\cdots,x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1,\cdots,x_n)$$

则条件极值点在方程组 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0 \\ g_l = 0 \quad \forall l = 1,2,\cdots,m \end{cases}$

解 $(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ 中

判断 $\vec{x_0}$ 是否为极值点：方阵 $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_l}(\vec{x_0},\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\right)_{n\times n}$

正定则极小，负定则极大，不定时不能确定

含参变量常义积分 $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dy \quad y\in[c,d]$

连续定义：$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则 $I(y)$ 在 $[c,d]$ 连续

积分次序交换定理：$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续，则

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

积分号下求导定理 f, f_y' 都在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\frac{dI(x)}{dy} = \int_a^b f_y'(x,y)\,dx \quad \text{即} \quad \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$$

设 f, f_y' 都是 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续函数，设 $a(y)$ $b(y)$ 是 $[c,d]$ 上可导函数，满足 $a \le a(y), b(y) \le b$ 则 $F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 可导

且 $F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y'(x,y)\,dx + f(b(y),y)\,b'(y) - f(a(y),y)\,a'(y)$

重积分

D 可求面积 ⇔ ∂D 面积为 0

设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 上有界闭区域 $z=f(x,y)$ 在 D 上有界，将 D 用曲线网分成 n 个小区域 $\Delta D_1,\cdots,\Delta D_n$，记 ΔD_i 最大直径为 λ 在每个 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i,η_i) 记 $\Delta\sigma_i$ 为 ΔD_i 面积，若 $\lambda\to 0$ 时 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 极限存在且与区域分法和 (ξ_i,η_i) 无关，则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积，称此极限

为 $f(x,y)$ 在 D 上二重积分，记为 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

多重积分类似二重积分定义. $\int_\Omega f\,dV$

三重积分记为 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$

n 重积分记为 $\int_\Omega f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$

重积分性质

1. 线性性 $\int_\Omega(\alpha f+\beta g)\,dV=\alpha\int_\Omega f\,dV+\beta\int_\Omega f\,dV$
2. 区域可加性 $\int_\Omega f\,dV=\int_{\Omega_1} f\,dV+\int_{\Omega_2} f\,dV$ Ω 分为内点不相交 Ω_1, Ω_2
3. 保序性. $f\le g$. 则 $\int_\Omega f\,dV\le\int_\Omega g\,dV$
4. M.m 为 f 在 Ω 上上下确界. 则 $mV\le\int_\Omega f\,dV\le MV$
5. 绝对可积性. $\left|\int_\Omega f\,dV\right|\le\int_\Omega|f|\,dV$
6. 乘积可积性
7. 积分中值定理. f.g 在 Ω 可积、g 在 Ω 不变号. M.m 为 f 在 Ω 上上下确界

   则 $\exists\mu\in[m,M]$、s.t. $\int_\Omega f\cdot g\,dV=\mu\int_\Omega g\,dV$

   若 f 在 Ω 连续. 则 $\exists\xi\in\Omega$. s.t. $\int_\Omega f\cdot g\,dV=f(\xi)\int_\Omega g\,dV$

矩形区域上重积分计算

设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 若 $h(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 存在. 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. 且有

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

同理 n 维 $\Omega=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ $\Omega_*=[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$

$$\int_\Omega f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{\Omega_*}f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_2\cdots dx_n$$
$$=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}dx_{n-1}\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_n$$

一般区域上重积分计算. 设法(换次序/分区域) 换为累次积分计算

二重积分变量代换公式

T: $x=x(u,v)$ $y=y(u,v)$ 若 f 在 T(D) 连续则

$$\iint_{T(D)}f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

极坐标变换 $x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$

广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta$ $y=br\sin\theta$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$

n重积分变量代换 $T: y_1=y_1(x_1,\cdots,x_n)\ \cdots\ y_n=y_n(x_1,\cdots,x_n)$

$$\int_{T(\Omega)}f(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n=\int_{\Omega}f(y_1(\vec{x}),\cdots,y_n(\vec{x}))\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|dx_1\cdots dx_n$$

柱坐标、$x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$ $z=z$ $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$

球坐标 $x=r\sin\varphi\cos\theta$ $y=r\sin\varphi\sin\theta$ $z=r\cos\varphi$ $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$

曲线积分、曲面积分

设L是$\mathbb{R}^3$上一条可求长连续曲线.端点A.B. $f(x,y,z)$在L上有界. 令$A=P_0$ $B=P_n$ 在L上从A到B插入分点$P_1,\cdots,P_{n-1}$. 分别在$P_{i-1}P_i$上取一点(ξ_i,η_i,ζ_i)并记弧$P_{i-1}P_i$长度为Δs_i 若当$\max\{\Delta s_i\}\to 0$时 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$存在且与$P_i$ (ξ_i,η_i,ζ_i)选取无关. 则称其为$f(x,y,z)$在曲线L上的第一类曲线积分. 记为$\int_L f(x,y,z)ds$ 或$\int_L f(P)ds$

有线性性 和路径可加性.

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$$

平面光滑曲线 $L: y=y(x)$ $\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)}\,dx$

曲面Σ: $r(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$ $(u,v)\in D$. D光滑.

一一对应(简单曲面) 且x,y,z对u,v有连续偏导. Jacobi矩阵满秩.

则Σ光滑. E.F.G. Gauss系数

面积: $S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ $E=\vec{r_u}\cdot\vec{r_u}=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2$

$F=\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}=x_u'^2x_v'^2+y_u'^2y_v'^2+z_u'^2z_v'^2$ $G=\vec{r_v}\cdot\vec{r_v}=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2$

第一类曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$ 定义类似第一类曲线积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_\Sigma f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$\Sigma: z=z(x,y)$ $\quad \iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dx\,dy$

第二类曲线积分 L为从A到B定向光滑曲线 在L上每一点取单位切向量 $\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 使它与L定向相一致. 设 $f(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 是L上向量值函数. 则称

$$\int_L \vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds=\int_L[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\,ds$$

为f在L上第二类曲线积分

$$\int_L\vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds=\int_L\vec{f}\,d\vec{s}=\int_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

性质: 方向性. $\int_L\vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds=-\int_{-L}\vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds$ 线性性. 路径可加性

$$\int_L\vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds=\int_a^b[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)$$
$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt$$

第二类曲面积分 $\iint_\Sigma\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS$ 定义类似第二类曲线积分. Σ为定向曲面

$$\iint_\Sigma\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_\Sigma[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS$$

方向性 $\iint_{-\Sigma}\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_\Sigma\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS$ ($\vec{n}$方向相反) 线性性. 曲面可加性

$$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

$$\iint_\Sigma\vec{f}\cdot\vec{n}\,d\vec{S}=\pm\iint_D\Big[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$
$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv$$

简单闭曲线(Jordan曲线) $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ $\quad t\in[\alpha,\beta]$ $\quad \vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$

$\forall\, t_1\neq t_2\in(\alpha,\beta)$ $\quad \vec{r}(t_1)\neq\vec{r}(t_2)$

无"洞"→单连通曲域　有"洞"→复连通曲域

对于曲域 D. 给边界 ∂D 规定一个正向 D 总在 ∂D 左侧. 这个定向称为 D 的诱导定向 这样定向的 ∂D 称 D 的正向边界

<u>Green 公式</u>　D 为平面上光滑/分段光滑简单闭曲线所围单连通闭区域

若 $P(x,y)$ $Q(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数. 则

$$\int_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$ ∂D 为 D 正向边界

有限个洞的复连通区域. 切开. 公式一致

记 ∂D 上单位切向量 $\vec{\tau}$. 单位外法向量 $\vec{n}$

$$\iint_D\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial D}Fdy-Gdx=\int_{\partial D}[F\sin(\vec{\tau},x)-G\cos(\vec{\tau},x)]ds$$

$$=\int_{\partial D}[F\cos(\vec{n},x)+G\cos(\vec{n},y)]ds$$

D 面积 $S=\int_{\partial D}xdy=-\int_{\partial D}ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}xdy-ydx$

路径无关　对于 D 内 $\forall$ A.B 两点、$\int_L Pdx+Qdy$ 只与 A.B 有关. 与从 A 到 B 路径 L 无关. 则称 $\int_L Pdx+Qdy$ 路径无关

Green 定理　$\forall$ 闭曲线 $L\subset D$. $\int_L Pdx+Qdy=0 \Leftrightarrow \int_L Pdx+Qdy$ 路径无关

$\Leftrightarrow \exists$ D 上可微函数 $U(x,y)$. s.t. $dU=Pdx+Qdy$. $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$U(x,y)$ 为 1-形式 $Pdx+Qdy$ 的原函数

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$$

设 D 为平面单连通区域 $P(x,y)$ $Q(x,y)$ 为 D 上连续函数. $\int_L Pdx+Qdy$ 路径无关 $\Leftrightarrow$ D 上 $\exists$ $Pdx+Qdy$ 一个原函数 $U(x,y)$. 此时 $\forall A(x_A,y_A)$ $B(x_B,y_B)$ 有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}Pdx+Qdy=U(x_B,y_B)-U(x_A,y_A)$$ $\overset{\frown}{AB}$ 为从 A 到 B 任意路径

<u>Gauss 公式</u>　Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 上光滑/分片光滑封闭曲域所围二维单连通区域

$P(x,y,z)$ $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ 在 Ω 上有连续偏导数. $\partial\Omega$ 定向为外侧. 称为 Ω 诱导定向 则有:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

Ω体积 $V=\iiint_\Omega dxdydz=\iint_{\partial\Omega} xdydz=\iint_{\partial\Omega} ydxdz=\iint_{\partial\Omega} zdxdy$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} xdydz+ydxdz+zdxdy$$

Stokes公式

Σ为光滑曲面 $\partial\Sigma$为分段光滑闭曲线若. P.Q.R在Σ及其$\partial\Sigma$上有连续偏导数,则成立:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

写成行列式

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

Fourier 级数

三角级数 形如 $\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

周期为2π的Fourier展开. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $n=1,2,\cdots$

正弦级数 $f(x)$为奇函数 $a_n=0$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ $f(x)\sim\sum b_n\sin nx$

余弦级数 $f(x)$为偶 $b_n=0$ $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$

任意周期 Fourier展开.

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx \quad b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$