TonyCrane 概率论(H)

Poisson 定理. $n\to\infty$ $np_n\to\lambda$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b(k;n,p)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Poisson 分布 $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

分布函数. $F(x)=P(\xi\le x)$

单调不减. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$. 右连续. $F(x+0)=F(x)$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)\,dy$ $p(x)$为密度函数 $p(x)=F'(x)$

$p(x)\ge 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=1$

正态分布 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$ $\xi\sim N(a,\sigma^2)$.

$\xi\sim N(a,\sigma^2)$ 用 $\eta=\frac{1}{\sigma}(\xi-a)$ 代换. $\eta\sim N(0,1)$ 标准一.

$P(\eta<x)=\Phi(x)$

$F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(y_1,\cdots,y_n)\,dy_1\cdots dy_n$

$p_\xi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)\,dv$ $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\xi(u)\,du$

n维正态. B为n维正定对称矩阵. $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$ $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)'$

$$p(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|B|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})'B^{-1}(\vec{x}-\vec{a})\right\}\quad \vec{\xi}\sim N(\vec{a},B)$$

二维: $B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2\\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ $\vec{x}=(x,y)'$ $\vec{a}=(a,b)'$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\times\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$(\xi,\eta)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$ 边际为正态.

$P(\eta\le y\mid\xi=x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{p(x,v)}{p_\xi(x)}\,dv$ $p_{\eta|\xi}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}$

<u>离散随机变量求和</u> $\zeta=\xi+\eta$

$P(\zeta=r)=\sum_{k=0}^{r}P(\xi=k)P(\eta=r-k)$ 离散卷积.

连续: $f(x)$严格单调 $f^{-1}(y)$有连续导数. $\eta=f(\xi)$ 密度:

$$g(y)=\begin{cases}p(f^{-1}(y))\,\left|(f^{-1}(y))'\right| & y\in f(x)\text{值域}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$\eta=\xi_1+\xi_2 \quad p_\eta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)p_2(z-x)dx$

$\xi\sim N(a_1,\sigma_1^2) \quad \eta\sim N(a_2,\sigma_2^2) \quad \xi+\eta\sim N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$\eta=\xi_1/\xi_2 \quad p_\eta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(zx,x)|x|dx$

$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 密度函数为 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 有 n 个函数. $\eta_1=f_1(\xi_1,\cdots,\xi_n)$

$\cdots\ \eta_n=f_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 则 $(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 也是随机向量.

若 f_i 有唯一反函数组 $x_i=x_i(y_1,\cdots,y_n)$ 且

$J=\partial(x_1,\cdots,x_n)/\partial(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$ 则 $(y_1,\cdots,y_n)\in(f_1,\cdots f_n)$

值域时. 密度为 $q(y_1,\cdots,y_n)=p(x_1(y_1,\cdots,y_n)\cdots,x_n(y_1,\cdots,y_n))|J|$

<u>连续随机变量期望.</u> $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx<\infty$ 时 称

$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$ 为 ξ 期望. 否则 称之不存在

$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF(x)$ Stieltjes 积分

$\eta=f(\xi) \quad E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF_\eta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dF_\xi(x)$

ξ 与 η 同分布 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 有界连续函数 f 有 $Ef(\xi)=Ef(\eta)$

<u>Stein 引理.</u> $\xi\sim N(0,1)$ g 连续可微. 且 $E|g(\xi)\xi|<\infty$ $E|g'(\xi)|<\infty$

$\Leftrightarrow E[\xi g(\xi)]=Eg'(\xi)$

$\xi_1,\cdots\xi_n$ 相互独立. $E\xi_i$ 均存在, 则 $E(\xi_1\cdots\xi_n)=E\xi_1\cdots E\xi_n$

<u>条件期望.</u> $E(\eta|\xi=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\,dF_{\eta|\xi}(y|x)$

$E[E(\eta|\xi)]=E\eta$

<u>全期望公式</u> $E\eta=\sum_i p_iE(\eta|\xi=x_i)=\sum_i E(\eta|\xi=x_i)P(\xi=x_i)$

$E(h(\xi)\eta|\xi)=h(\xi)E(\eta|\xi)$

柯西-施瓦兹不等式 $|E(XY|Z)|\le\sqrt{E(X^2|Z)}\cdot\sqrt{E(Y^2|Z)}$ $\quad|E\xi\eta|^2\le E\xi^2E\eta^2$

$\xi-E\xi$ 为 ξ 对于均值 $E\xi$ 的离差. 是随机变量.

<u>方差.</u> $Var\,\xi=E(\xi-E\xi)^2$ 标准差 $\sqrt{Var\,\xi}$

$Var\,\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2dF_\xi(x) \qquad Var\,\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$

切比雪夫不等式 $P(|\xi-E\xi|\geq\varepsilon)\leq \mathrm{Var}\xi/\varepsilon^2$

马尔可夫不等式 $P(|\xi|>\varepsilon)\leq E\xi/\varepsilon$

若 $c\neq E\xi$ 则 $\mathrm{Var}\xi<E(\xi-c)^2$

$\xi_1,\cdots\xi_n$ 两两独立. 则 $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\xi_i$

设ξ期望. 方差都存在. $\mathrm{Var}\xi>0$ 则 $\xi^*=(\xi-E\xi)/\sqrt{\mathrm{Var}\xi}$ 称为 ξ的标准化. $E\xi^*=0$ $\mathrm{Var}\xi^*=1$

协方差 $\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)=E(\xi_i-E\xi_i)(\xi_j-E\xi_j)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi_i)(y-E\xi_j)dF_{ij}(x,y)$

$\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_i)=\mathrm{Var}\xi_i$ $\quad\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\xi_i+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)$

$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=\mathrm{Cov}(\eta,\xi)=E\xi\eta-E\xi E\eta$

$\mathrm{Cov}(a\xi,b\eta)=ab\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$ $\quad\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\eta)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(\xi_i,\eta)$

n维随机向量 $\vec{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'$ 协方差矩阵:

$$\mathbb{B}=E(\vec{\xi}-E\vec{\xi})(\vec{\xi}-E\vec{\xi})'=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

$b_{ij}=\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)$ $\quad\mathbb{B}$是非负定的. $\quad\mathbb{C}\vec{\xi}$ 协方差阵为 $\mathbb{C}\mathbb{B}\mathbb{C}'$

ξ与η的相关系数 $r_{\xi\eta}=\mathrm{Cov}(\xi^*,\eta^*)=E(\xi-E\xi)E(\eta-E\eta)/\sqrt{\mathrm{Var}\xi\mathrm{Var}\eta}$

ξ与η不相关 $\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow E\xi\eta=E\xi E\eta\Leftrightarrow\mathrm{Var}(\xi+\eta)=\mathrm{Var}\xi+\mathrm{Var}\eta$

$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=E[(\xi-a)(\eta-b)]=E[E((\xi-a)(\eta-b)|\xi)]$

原点矩 $m_k=E\xi^k$ k阶原点矩. 高阶矩存在⇒低阶一定存在.

中心矩 $c_k=E(\xi-E\xi)^k$ k阶中心矩. 二阶→方差.

$c_3/c_2^{3/2}$ 偏态系数 $\quad c_4/c_2^2-3$ 峰态系数

$\xi\sim N(0,\sigma^2)$ $\quad m_n=c_n=\begin{cases}0 & n=2k+1\\1\cdot3\cdots(n-1)\sigma^n & n=2k\end{cases}$ 偏/峰均为0

$c_k=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}m_1^r m_{k-r}$ $\quad m_k=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}m_1^r c_{k-r}$

α阶绝对矩 $M_\alpha=E|\xi|^\alpha$

指数分布任意阶矩存在 $E\xi^k=k!/\lambda^k$

复随机变量 $\zeta=\xi+i\eta$ $\quad E\zeta=E\xi+iE\eta$.

ξ的特征函数 $f(t)=Ee^{it\xi}$ $\quad t\in\mathbb{R}$ $\quad E|e^{it\xi}|=1$ $\quad f(t)$一定有意义.

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}p(x)dx \leftarrow p(x)\text{的傅里叶变换.}$$

$|f(t)|\le f(0)=1$ $\quad f(-t)=\overline{f(t)}$ $\quad f(t)$在$\mathbb{R}$上一致连续.

$f(t)$是特征函数 $\Leftrightarrow$ $f(t)$非负定, 连续且$f(0)=1$

$\xi_1\cdots\xi_n$相互独立. 特征函数分别为$f_1(t)\cdots f_n(t)$ 则$\eta=\xi_1+\cdots+\xi_n$特征函数:

$$f_\eta(t)=f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t)$$

$E\xi^n$存在. 且 $f(t)$ n次可微. $\quad k\le n$时. 有

$$f^{(k)}(t)=i^k\int_{-\infty}^{+\infty}x^ke^{itx}dF(x) \qquad f^{(k)}(0)=i^kE\xi^k$$

$E\xi^2$存在时 $\quad E\xi=-if'(0)$ $\quad E\xi^2=-f''(0)$ $\quad Var\xi=-f''(0)+[f'(0)]^2$

n为偶数 $\quad f^{(n)}(0)$存在. 则 $E\xi^n$存在.

$\eta=a\xi+b$ 则 $\quad f_\eta(t)=e^{ibt}f(at)$

<u>逆转公式</u> 分布函数$F(x)$ 特征函数$f(t)$ $\quad x_1,x_2$为$F(x)$连续点、

则
$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)dt$$

$f(t)$是特征函数. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty$ 则$F(x)$导数存在且连续.

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt$$

$\{F_n\}$是一列分布函数 F是一个… 如果对F的每个连续点$x\in\mathbb{R}$, 当$n\to+\infty$时都有$F_n(x)\to F(x)$ 称F_n弱收敛于$F(x)$ 记$F_n\xrightarrow{w}F$

若ξ_n分布函数弱收敛于ξ分布函数. 称ξ_n依分布收敛于ξ, 记$\xi_n\xrightarrow{d}\xi$

海莱第一定理. 设$\{F_n\}$是一列分布函数. 则存在一个单调不减右连续的函数

F, $0\le F(x)\le1$ $\quad x\in\mathbb{R}$. 和一子列$\{F_{n_k}\}$ 使对F的每个连续点x, 有

$F_{n_k}(x)\to F(x)$ $\quad (k\to+\infty)$

海莱第二定理. 若 $F_n \xrightarrow{w} F$ 且 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有界连续函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF(x)$$

勒维连续性定理. 若 $F_n \xrightarrow{w} F$, 则特征函数列 $\{f_n(t)\}$ 在任何有限区间内一致收敛于 $f(t)$

逆极限定理. 对于每个 t, $f_n(t) \to f(t)$ 且 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续 则 $F_n \xrightarrow{w} F$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall$ 有界连续 $g(x)$, 有 $Eg(\xi_n) \to Eg(\xi) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) \to f(t)$

推论. $\forall x$, $p_n(x) \to p(x)$ 则 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

性质. $F_n \xrightarrow{w} F$, F 连续, 则 $F_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 一致收敛于 $F(x)$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, g 连续, 则 $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$

$a_n \to a$ $b_n \to b$ $F_n \xrightarrow{w} F$ 则 $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{w} F(ax+b)$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ 则 $a_n \xi_n + b_n \xrightarrow{d} a\xi + b$

德莫佛-拉普拉斯 $x \in \mathbb{R}$. $P(S_n = k) = b(k; n, p)$ $q = 1-p$. 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x\right) = \phi(x)$$

$$P(\alpha < S_n \le \beta) \approx \phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$\{\xi_n\}$ 是一列随机变量. 若 $\exists$ 常数 $B_n > 0$ 与 A_n 使得 $\frac{1}{B_n}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k - A_n\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$

则称 $\{\xi_n\}$ 服从中心极限定理.

林德贝格-勒维定理. $\{\xi_n\}$ 独立同分布. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ $E\xi_1 = a$ $Var\xi_1 = \sigma^2$

则中心极限定理成立. $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

林德贝格-费勒定理 $\{\xi_n\}$ 独立 则

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k} \max_{1\le k\le n} Var\xi_k = 0}_{\text{费勒条件}} \text{ 与 } \frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \forall \tau > 0 \quad \underbrace{\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} Var\xi_k} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x - E\xi_k| \ge \tau\sqrt{\sum Var\xi_k}} (x - E\xi_k)^2\,dF_k(x) \to 0}_{\text{林一条件}}$$

李雅普诺夫定理 $\{\xi_n\}$ 独立. $\exists\delta>0$ 使 $n\to+\infty$ 时有

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}Var\xi_k\right)^{1+\delta/2}}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k-E\xi_k|^{2+\delta}\to 0$$ 则中心 — 成立.

$\forall\varepsilon>0$ $\lim_{n\to+\infty}P(|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon)=0$ 或 $\lim_{n\to+\infty}P(|\xi_n-\xi|<\varepsilon)=1$

则称 ξ_n 依概率收敛于 ξ. 记 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$

若 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ 则 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$. 若 $\xi_n\xrightarrow{d}c$ 常数 则 $\xi_n\xrightarrow{P}c$

马尔科夫不等式 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负单调不减 则 $\forall x>0$ 有

$P(|\xi|>x)\leq Ef(|\xi|)/f(x)$

$\xi_n\xrightarrow{P}\xi \Leftrightarrow E\dfrac{|\xi_n-\xi|^2}{1+|\xi_n-\xi|^2}\to 0$

伯努里大数定律. $\{\xi_n\}$ 独立同分布. $P(\xi_n=1)=p$ $P(\xi_n=0)=1-p$.

$0<p<1$ 记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 则 $S_n/n\xrightarrow{P}p$

若 $\exists$ 常数列 $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ s.t. $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-b_n\xrightarrow{P}0$ 则称其服从(弱)大数定律.

切比雪夫大数定律. $\{\xi_n\}$ 独立. $E\xi_n=\mu_n$ $Var\xi_n=\sigma_n^2$ 若 $\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2/n^2\to 0$

则 $\{\xi_n\}$ 服从弱大数定律. 即 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_n\xrightarrow{P}0$

马尔科夫大数定律. $\{\xi_n\}$ 不一定独立 $Var\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)/n^2\to 0$ 则切 — 仍成立.

辛钦大数定律. $\{\xi_n\}$ 独立同分布. $E|\xi_1|<\infty$ 记 $\mu=E\xi_1$ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

则 $\{\xi_n\}$ 服从弱大数定律. 即 $S_n/n\xrightarrow{P}\mu$