TonyCrane 离散数学理论基础

Chap. 1 Logic and Proofs

交 $\wedge$ conjunction 并 $\vee$ disjunction

$p\to q$ 当p为F或pq全为T时为T 称 p is sufficient for q

p only if q、 q whenever p. q is necessary for p.

逆命题 converse 否命题 inverse 逆否命题 contrapositive

$p\leftrightarrow q$ 当p q相同时为T 否则F. 称 p iff q. p exactly when q

tautology 永真(重言) contradiction 矛盾(永假) contingency 可能

De. Morgan's law $\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$ $\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$

$p\vee(p\wedge q)\equiv p$ $p\wedge(p\vee q)\equiv p$

$p\to q\equiv\neg p\vee q$ $p\to q\equiv\neg q\to\neg p$ $(p\to q)\wedge(p\to r)\equiv p\to(q\wedge r)$

$(p\to r)\wedge(q\to r)\equiv(p\vee q)\to r$ $(p\to q)\vee(p\to r)\equiv p\to(q\vee r)$

$(p\to r)\vee(q\to r)\equiv(p\wedge q)\to r$ $p\leftrightarrow q\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$

$p\leftrightarrow q\equiv\neg p\leftrightarrow\neg q$ $p\leftrightarrow q\equiv(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$ $\neg(p\leftrightarrow q)\equiv p\leftrightarrow\neg q$

CNF: $(\cdots\vee\cdots)\wedge(\cdots\vee\cdots)$ DNF: $(\cdots\wedge\cdots)\vee(\cdots\wedge\cdots)$

Chap 2. Basic Structures

$A-B=A\cap\overline{B}$ $A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$

$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$ 对称差 (symmetric difference)

定义域 domain. 值域 codomain. $f(a)=b$ 像 b image. 原像 a preimage

单射 one-to-one/injective. $\forall a,b\in D(f)$ $f(a)=f(b)\to a=b$

满射 onto/surjective $f:A\to B$ $\forall b\in B.\exists a\in A$ s.t. $f(a)=b$

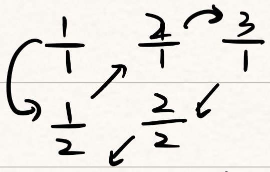
双射 one-to-one correspondence / bijective

$\sum_{k=0}^{n}ar^k=(ar^{n+1}-a)/(r-1)$ $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ $\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ $\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ $(|x|<1)$

A.B存在双射.则有相同势(Cardinality) $|A|=|B|$

可数集：有限或与 $\mathbb{Z}^+$ 等势，可数无穷集势记为 $\aleph_0$ (aleph null)

正有理数可数  实数集不可数

A、B可数 $A \cup B$ 可数

$|P(\mathbb{Z}^+)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$

01矩阵 $A \vee B$ $A \wedge B$ 就是逐元素对应求 $\vee$ $\wedge$

$A \odot B = C$ $c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$

即把矩阵乘法中 $\times$ 换为 $\wedge$，$+$ 换为 $\vee$

$A^{[r]} = A \odot \cdots \odot A$ r times

Chap.3 Algorithm

properties: input output definiteness (每步都有明确定义)

correctness finiteness (有限步出结果)

effectiveness (有限时间) generality

$\exists C, k.\ \forall x > k.\ |f(x)| \leq C|g(x)|$ then $f(x)$ is $O(g(x))$

〃 $|f(x)| \geq C|g(x)|$ then $f(x)$ is $\Omega(g(x))$

$\exists C_1 C_2 k\ \forall x > k\ C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ then $f(x)$ is $\Theta(g(x))$

$\log n^2 < 2^{\sqrt{\log_2 n}} < n(\log n)^{1001} < n^{1.001} < (1.001)^n < n^n$ in O

Chap5. Induction and Recursion

Mathematical induction 数学归纳法

$P(1)$ is true. $P(k) \to P(k+1)$ is true for $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

Strong induction 强归纳法. $P(1)$ is true.

$(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)) \to P(k+1)$ is true for $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

Well-Ordering Property 良序定理.

every nonempty set of nonnegative integers has a least element

Chap. 6. Counting

排列 r-permutations of a set with n distinct elements

$$P(n,r) = n(n-1)\cdots(n-r+1) = n!/(n-r)!$$

组合 r-combinations of a set with n elements

$$C(n,r) = n!/r!(n-r)!$$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0 \quad \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k} \qquad \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \quad \binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$$

r-permutations of a set of n objects with repetition allowed is n^r

r-combinations of a set of n elements with repetition allowed is

$$C(n+r-1,r) = C(n+r-1,n-1)$$

把 n 个不同物体放入 k 个不同盒子.第 i 个盒子有 n_i 个物体.方法有

$n!/n_1!\cdots n_k!$ 种

把 r 个相同物体放入 n 个不同盒子.方法有 $C(n+r-1,n-1)$ 种

把 n 个不同物体放入 k 个相同盒子 方法有 $\sum_{j=1}^{k}S(n,j)$ 种.

$S(n,j)$ 第二类 String 数.把 n 个不同物体放入 j 个相同盒子 没有空盒

$$S(n,j) = \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\binom{j}{i}(j-i)^n \qquad S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)$$

把 n 个相同物体放入 k 个相同盒子与将 n 分为最多 k 个正数相加

的方法数相同

Chap 8. Advanced Counting Techniques

线性齐次递推关系. $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$

特征方程 characteristic equation $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$

特征根. t 个不同根 $r_1 \cdots r_t$，每个根重数 $m_1, \cdots, m_t$.

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n$$
$$+ \cdots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \cdots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n$$

即每多一重, 系数多乘一个 n

线性非齐次递推关系、$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$

关联齐次递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 解为 $a_n^{(h)}$

则 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ $a_n^{(p)}$ 为特解.

求特解: $F(n) = (b_t n^t + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$

若 s 不是特征根. 则特解形式为 $(p_t n^t + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$

若 s 是 m 重特征根 ,, $n^m (p_t n^t + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$

将特解代入递推关系、化解求系数得到特解.

生成函数 $a_0, \cdots, a_k, \cdots$ 的生成函数 $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

$a_k = C(n,k)$ $G(x) = (1+x)^n$

$a_k = C(n,k) a^k$ $G(x) = (1+ax)^n$

$a_k = C(n, k/r)$ if $r \mid k$ else 0 $G(x) = (1+x^r)^n$

$a_k = 1$ if $k \le n$ else 0 $G(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$a_k = 1$ $G(x) = 1/1-x$

$a_k = a^k$ $G(x) = 1/1-ax$ $a_k = 1$ if $r \mid k$ else 0 $G(x) = 1/1-x^r$

$a_k = k+1$ $G(x) = 1/(1-x)^2$ $a_k = 1/k!$ $G(x) = e^x$

$a_k = (-1)^{k+1}/k$ $G(x) = \ln(1+x)$

$a_k = C(n+k-1, k)$ $G(x) = 1/(1-x)^n$

$a_k = (-1)^k C(n+k-1, k)$ $G(x) = 1/(1+x)^n$

$a_k = C(n+k-1, k) a^k$ $G(x) = 1/(1-ax)^n$

Chap 9. Relations

A到B的二元关系是$A\times B$的子集

reflexive 自反 $\forall a\in A.\ (a,a)\in R$

symmetric 对称 $\forall a,b\in A\ (a,b)\in R\to(b,a)\in R$

antisymmetric 反对称 $\forall a,b\in A\ (a,b)\in R$ and $(b,a)\in R\to a=b$

transitive 传递 $\forall a,b,c\in A\ (a,b),(b,c)\in R\to(a,c)\in R$

R is transitive iff $R^n\subseteq R\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

$M_R=[m_{ij}]\quad m_{ij}=1$ if $(a_i,b_j)\in R$ else 0

$M_{R_1\cup R_2}=M_{R_1}\vee M_{R_2}\qquad M_{R_1\cap R_2}=M_{R_1}\wedge M_{R_2}$

$M_{S\circ R}=M_R\odot M_S\qquad M_{R^n}=M_R^{[n]}$

R关于属性P的闭包closure是包含R的有属性P的最小关系S.

reflexive closure of R is $R\cup I_A=R\cup\{(a,a)\mid a\in A\}$

symmetric closure of R is $R\cup R^{-1}$

transitive closure of R is $R^*=\bigcup_{n=1}^{|A|}R^n$ (connectivity relation)

Warshall's Algorithm. $W=M_R=[w_{ij}]$

for $k=1..n$ for $i=1..n$ for $j=1..n$ $w_{ij}=w_{ij}\vee(w_{ik}\wedge w_{kj})$

then W is M_{R^*}

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to=M_{R^*}$$

等价关系 equivalence relation $\Leftrightarrow$ reflexive, symmetric, transitive

等价类 $[a]_R=\{s\mid(a,s)\in R\}$

Chap 10. Graph

Simple graph undirected no multiple edges no loops
Multigraph undirected has multiple edges no loops
Pseudograph undirected has 〃 has loops
Simple directed graph. Directed multigraph (has loop)
Mixed graph directed and undirected. has 〃 has loops
v的所有邻居 $N(v)$ 无向图v的度 $\deg(v)$
无向图 $G=(V,E)$ $|E|=m$ $2m=\sum_{v\in V}\deg(v)$
无向图有偶数个度数为奇数的顶点
有向图v 入度 $\deg^-(v)$ 出度 $\deg^+(v)$
有向图 $\sum_{v\in V}\deg^-(v)=\sum_{v\in V}\deg^+(v)=|E|$
n顶点完全图 K_n  n顶点环形图 C_n 
n顶点轮形图 W_n  完全二分图 一侧m 一侧n $K_{m,n}$
二分图完全匹配. M. 从 V_1 到 V_2 $|M|=|V_1|$
有完全匹配 $\Leftrightarrow \forall A\subseteq V_1,\ |N(A)|\geq|A|$
同构 G_1 G_2 间存在一个点集的双射. 保持连接关系不变
强连通. $\forall a,b\in V$ $a\to b$ $b\to a$ 均有路径. 弱连通对应无向图连通
Euler circuit. 包含G中所有边的简单环. path 包含所有边的简单路径
connected multigraph has Euler circuit $\Leftrightarrow$ 所有顶点度数为偶
〃 has Euler path $\Leftrightarrow$ 有且仅有两个顶点(路径端点)度数为奇
directed multigraph has
Euler circuit: 弱连通. 所有顶点入度出度相等.
Euler path: 弱连通 〃 除了一个点入度比出度大一. 一个点〃 小一
Hamilton circuit / path. 通过每个顶点且仅经过一次
Dirac's thm. 简单图G $n\geq3$ 个顶点. 每个顶点度最小 $\frac{n}{2}$. 则存在Hamilton环

Ore's thm. 简单图 G $n \geq 3$ 个顶点，且不相邻的 u、v 两个顶点有 $\deg(u)+\deg(v) \geq n$，则 G 有 Hamilton 环

无向图有 Hamilton 路径必要条件：G 连通 最多 2 个顶点度数小于 2

〃 环必要条件：G 连通 如果有一个度数为 2 的顶点，则与它连接的边都在 Hamilton 环中；任意 V 的非空子集 S，G−S 的连通部分小于等于 $|S|$

Dijkstra's Algorithm

for $i = 1..n$: $L(v_i) = +\infty$ $L(s) = 0$ $S = \emptyset$

while $t \notin S$:

u = 不在 S 中，$L(u)$ 最小的顶点 $S = S \cup \{u\}$

for 所有不在 S 中的 v

$L(v) = \min(L(v), L(u) + w(u,v))$

$L(t)$ 是从 s 到 t 的最短路长度

平面图 planar 可以画成边不相交的形式

Euler's Formula 连通平面简单图 G，划分区域数为 r，$r = e - v + 2$

若 G 是连通平面简单图 { 当 $v \geq 3$ 时 $e \leq 3v-6$

有一个顶点度数不超过 5

当 $v \geq 3$ 且没有长为 3 的回路时，$e \leq 2v-4$

同胚 homeomorphic 可以通过同一个图在边上加点方式得到

图 G 是非平面图 ⇔ G 包含与 $K_{3,3}$ 或 K_5 同胚的子图

色数 chromatic number 给图 G 上色使相邻顶点颜色不同的最小的颜色数，记为 $\chi(G)$

四色定理：平面图色数最大为 4

χ(无环图) = 2 $\chi(C_n) = 2$ if n is even else 3

$\chi(K_n) = n$ χ(二分图) = 2

Chap 11. Trees

满 m 叉树. internal vertices

n 顶点 $i=\frac{(n-1)}{m}$ 个内部节点 $l=\frac{(m-1)n+1}{m}$ 个叶节点

i 内部节点 $n=mi+1$ 顶点 $l=(m-1)i+1$ 叶节点

l 叶节点 $n=\frac{ml-1}{m-1}$ 顶点 $i=\frac{l-1}{m-1}$ 内部节点

Huffman coding. 出现概率最小两颗树 最小在右(作为1) 第二在左(作为0) 构成新树. 重复此过程

前序遍历 preorder: 根 → 左子树 → 右子树

中序遍历 inorder: 左子树 → 根 → 右子树

后序遍历 postorder: 左子树 → 右子树 → 根

中缀 infix 表达式: 带完整括号的中序遍历结果 (原算式)

前缀 prefix 表达式 (波兰表达式) 前序遍历表达式树结果

后缀 postfix 表达式 (逆波兰表达式) 后序遍历 〃 〃

生成树 Spanning Tree. 包含 G 全部节点部分边的树. dfs. bfs

Prim's Algorithm:

T = 最小权边

for i = 1..n-2

e = 与 T 中点相连且加入 T 后不会形成环的最小权边 将 e 加入 T

T 为 MST

Kruskal's Algorithm:

T = 空图

for i = 1..n-1

e = 加入 T 中不会形成环的最小权边. 将 e 加入 T

T 为 MST